Cálculo Vectorial - Examen Final

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

miércoles, junio 3 de 2020

No está permitido el uso de ningún tipo de apuntes, libros o calculadoras. Durante el desarrollo del parcial no está permitida la comunicación de ningún tipo con personas distintas al profesor del curso.

> "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquierotro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

Duración: 120 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[2pts]** Si $f(u,v) = (u+v, u-v)$ y $g(x,y) = (x-y.\ xy)$. Entonces $D\,(f \circ g)\,(0,1)$ es igual a

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2. **[2pts]** El valor de la derivada direccional de la función $f(x,y) = x - xy^2$ en el punto $(1,0)$ en la dirección $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es

   (a) $2\sqrt{2}$

   (b) 0

   (c) $-1/\sqrt{2}$

   (d) 1

   (e) -2

3. **[2pts]** La función $f(x,y) = (x+3)^2 - 4(y-1)^2$ tiene un sólo punto crítico. Halle el punto crítico y determine si en ese punto se tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de silla.

   (a) El punto crítico es $(0,0)$ y corresponde a un máximo local.

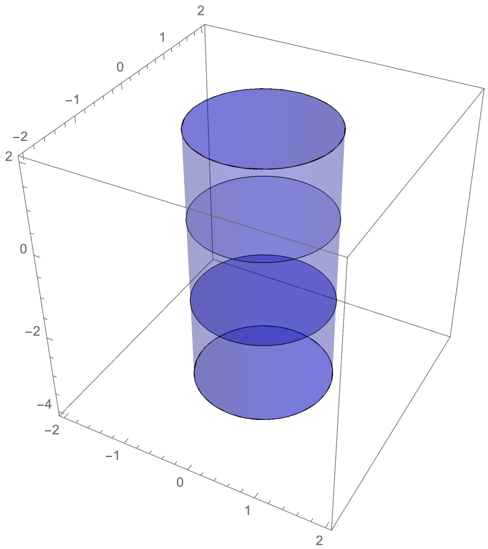
   (b) El punto crítico es $(0,0)$ y corresponde a un punto de silla.

   (c) El punto crtíco es $(-3,1)$ y corresponde a un punto de silla.

   (d) El punto crtíco es $(-3,1)$ y corresponde a un máximo local.

   (e) El punto crtíco es $(-3,1)$ y corresponde a un mínimo local.

4. **[2pts]** Para la fabricación de un mueble se desea realizar un cilindro con dos repisas interiores con el volumen total máximo posible. Se dispone de C metros cuadrados de material para usar en la superficie lateral y los cuatro discos (la tapa inferior, superior y las dos repisas).



La razón entre la altura y el radio para el cilindro que maximiza el volumen total es:

(a) 3

(b) 2

(c) $\frac{\sqrt{C}}{2\sqrt{3\pi}}$

(d) 4

(e) $\frac{2\sqrt{C}}{\sqrt{3\pi}}$

5. **[2pts]** Por medio del cambio de variables $x = u$, $y = uv$ la integral doble $\int_0^1 \int_y^1 \cos(x^2) dxdy$ se transforma en

(a) $\int_0^1 \int_{uv}^1 \cos(u^2) ududv$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \cos(u^2) dudv$

(c) $\int_0^1 \int_0^1 \cos(u^2) ududv$

(d) $\int_0^1 \int_v^1 \cos(u^2) ududv$

6. **[2pts]** Si σ es el semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$ y $\rho(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{2}} + x$ entonces $\displaystyle\int_\sigma x\rho ds$ es igual a

   (a) 0
   (b) $\dfrac{\pi}{2}$
   (c) $-\dfrac{\pi}{2}$
   (d) π

7. **[2pts]** Sea $u(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^3$. Calcule $\displaystyle\int_\sigma \vec{H} \cdot d\vec{s}$, el trabajo realizado por el campo vectorial $\vec{H}(x, y, z) = \nabla u(x, y, z)$ a lo largo de la curva parametrizada $\sigma(t) = (\sin(t), \cos(t), \cos(t/2))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

   (a) -3
   (b) 3
   (c) -2
   (d) 2
   (e) 0

8. **[2pts]** Sea $\vec{H}(x, y, z) = (5x, 0, 0)$. Calcule el flujo $\displaystyle\iint_S \vec{H} \cdot d\vec{S}$ de $\vec{H}$ a través de la superficie cuadrada S contenida en el plano $x = 2$ cuyos puntos satisfacen $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ orientada en la dirección positiva del eje x.

   (a) 0
   (b) 10
   (c) 20
   (d) 40
   (e) 60

9. **[2pts]** Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 2$ y $z = 4$. La integral $\displaystyle\iint_S y^3 z^2 dS$ es igual a

   (a) $\sqrt{2}\displaystyle\int_2^4 \int_0^{2\pi} r^6 \sin^3\theta d\theta dr$
   (b) $\displaystyle\int_2^4 \int_0^{2\pi} r^5 \sin^3\theta d\theta dr$
   (c) $\sqrt{2}\displaystyle\int_2^4 \int_0^{2\pi} r^5 \sin^3\theta d\theta dr$
   (d) $\displaystyle\int_2^4 \int_0^{2\pi} r^6 \sin^3\theta d\theta dr$

10. **[3pts]** Sea σ_1 el círculo $x^2+y^2=25$ orientado en sentido anti-horario, y σ_2 el círculo $x^2+y^2=4$ orientado en sentido horario. De acuerdo al teorema de Green $\int_{\sigma_1+\sigma_2}\left(e^x-x^2y\right)dx+\left(e^y+xy^2\right)dy$ es igual a

   (a) $\int_2^5\int_0^{2\pi} r^2 d\theta dr$

   (b) $\int_2^5\int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr$

   (c) $-\int_2^5\int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr$

   (d) $-\int_2^5\int_0^{2\pi} r^2 d\theta dr$

11. **[3pts]** Sea S_1 el hemisferio $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$ orientado hacia arriba. Sea S_2 el disco $x^2+y^2\leq 4$, $z=0$ orientado hacia abajo. Sea $\vec{F}(x,y,z)=(y,z,x)$. Entonces

   (a) $\iint_{S_1}\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} > \iint_{S_2}\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$

   (b) $\iint_{S_2}\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}=-4\pi$

   (c) $\iint_{S_1}\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}=-\iint_{S_2}\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$

   (d) $\iint_{S_1}\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_2}\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$

12. **[3pts]** Sea $\vec{G}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{G}(x,y,z)=(2z-3y)\vec{\imath}+(3x-z)\vec{\jmath}+(y-2x)\vec{k}$. Marque todas las afirmaciones que son correctas:

   (a) Existe un campo vectorial $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de clase C^2 (sus primeras y segundas derivadas existen y son continuas) tal que $\vec{G}=\nabla\times\vec{F}$.

   (b) $\nabla\times\vec{G}=\vec{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$.

   (c) La integral de línea de $\vec{G}$ a lo largo de cualquier curva orientada cerrada simple en $\mathbb{R}^3$ es igual 0.

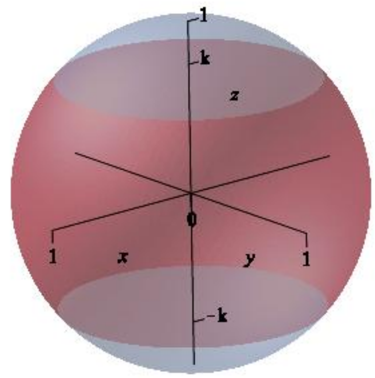
   (d) $\nabla\cdot\vec{G}=0$ en todo $\mathbb{R}^3$.

   (e) Existe un campo escalar $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $G=\nabla g$.

   (f) La integral de superficie de $\vec{G}$ sobre la frontera orientada de cualquier sólido de tipo IV en $\mathbb{R}^3$ es igual 0.

   (g) Ninguna de las anteriores es correcta.

13. **[3pts]** Sean B la bola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ y W el sólido al interior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ comprendido entre los planos $z = k$ y $z = -k$, siendo k la constante tal que Volumen$(W) = (2/\pi)$Volumen(B).



Suponga que ∂W (la frontera de W orientada con la normal unitaria exterior $\vec{n}$). Si $\vec{F}(x,y,z) = (x-y)\vec{\imath} + (y-z)\vec{\jmath} + (z-x)\vec{k}$, entonces el flujo de $\vec{F}$ a través de ∂W, $\iint_{\partial W} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}dS$, es igual a

(a) 3π
(b) 0
(c) 8
(d) 8/3